PLANIMETRIE

Winkel

Nebenwinkel betragen zusammen 180°.

Scheitelwinkel sind einander gleich.

Komplementwinkel betragen zusammen 90°.

Supplementwinkel betragen zusammen 180°.

Winkelmaße:

Altgrad (°)
Neugrad oder Gon (^{g})
Bogenmaß, Radiant (rad)
2π rad = 360° = 400^g
1 rad = 57.29578° = 57°17'45"
1 rad = $63{,}66198^g$
1° = 0.0174533 rad
$1° = 0.0\dot{1}^g$
1^g = 0.015708 rad
1^g = 0.9°

Symmetrie

Eine ebene Figur heißt **axialsymmetrisch**, wenn sie durch eine Gerade in zwei Teile zerlegt werden kann, die sich durch Umklappen um diese Gerade (Symmetrieachse) um 180° zur Deckung bringen lassen.

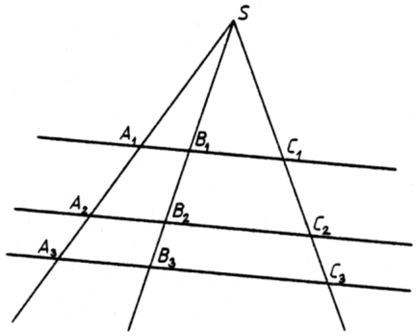
Eine ebene Figur heißt **zentralsymmetrisch**, wenn sie sich nach Drehung um 180° um einen bestimmten Punkt (Symmetriezentrum) mit der ursprünglichen Lage deckt.

Strahlensätze

1. Strahlensatz: Werden die Strahlen eines Strahlenbüschels von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf einem Strahl wie die gleichliegenden Abschnitte auf jedem anderen Strahl.

$$\overline{SA_1} : \overline{SA_2} : \overline{SA_3} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2} : \overline{SB_3} = \overline{SC_1} : \overline{SC_2} : \overline{SC_3}$$

$$\overline{SA_1} : \overline{A_1A_2} : \overline{A_2A_3} = \overline{SB_1} : \overline{B_1B_2} : \overline{B_2B_3} = \overline{SC_1} : \overline{C_1C_2} : \overline{C_2C_3}$$



2. Strahlensatz: Werden die Strahlen eines Strahlenbüschels von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die entsprechenden Scheitelstrecken auf irgendeinem Strahl.

$$\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} : \overline{A_3B_3} = \overline{SA_1} : \overline{SA_2} : \overline{SA_3}$$

$$\overline{B_1C_1} : \overline{B_2C_2} : \overline{B_3C_3} = \overline{SC_1} : \overline{SC_2} : \overline{SC_3}$$

usw.

Ähnlichkeit

Ebene Vielecke, die in der Form übereinstimmen, heißen ähnlich. (~)

Ähnlichkeitssätze

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen

- in zwei Winkeln oder
- im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel oder
- im Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite oder
- im Verhältnis der drei Seiten.

Ähnliche Dreiecke werden durch entsprechende Höhen oder Winkelhalbierenden oder Seitenhalbierenden in ähnliche Dreiecke zerlegt. In ähnlichen Dreiecken verhalten sich entsprechende Höhen, Winkelhalbierenden und Seitenhalbierenden wie ein Paar entsprechender Seiten. Die Umfänge ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie ein Paar entsprechender Strecken (Seiten, Höhen, Seitenhalbierenden usw.):

$$u_1 : u_2 = a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2 = k$$

(Ähnlichkeitsverhältnis, Linearvergrößerung)

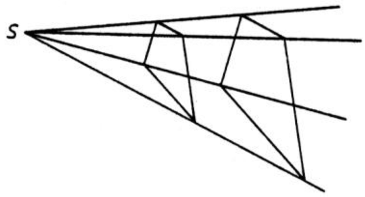
Die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate zweier entsprechender Strecken (Seiten, Höhen, Seitenhalbierenden usw.).

$A_1 : A_2 = a_1^2 : a_2^2 = b_1^2 : b_2^2 = c_1^2 : c_2^2 = k^2$
(k siehe oben!)

Vielecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis entsprechender Seiten oder in den entsprechenden Winkeln übereinstimmen.

Ähnlichkeitslage

Ähnliche Vielecke sind in Ähnlichkeitslage, wenn entsprechende Seiten parallel sind und entsprechende Punkte auf Strahlen eines Strahlenbüschels liegen. Der Scheitel S des Strahlenbüschels heißt Ähnlichkeitspunkt.



Kongruenz

Vielecke, die nicht nur in der Form, sondern auch in der Größe homologer Stücke übereinstimmen, heißen kongruent.

Kongruenzsätze

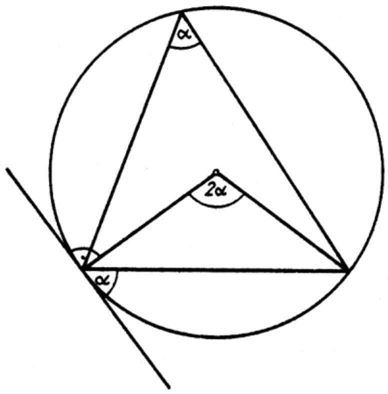
Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen

- in einer Seite und zwei Winkeln oder
- in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel oder
- in zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel oder
- in den drei Seiten.

Der Kreis

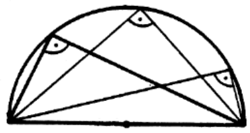
Der Satz vom Zentri- und Peripheriewinkel

Der Zentriwinkel ist doppelt so groß wie jeder beliebige Peripheriewinkel über demselben Bogen (über derselben Sehne).



Satz des Thales

Jeder Peripheriewinkel im Halbkreis ist ein rechter.



Der Satz vom Sehnentangentenwinkel

Der Sehnentangentenwinkel ist halb so groß wie der Zentriwinkel über demselben Bogen, folglich gleich dem Peripheriewinkel über demselben Bogen.

Kreisumfang: $u = 2r\pi$

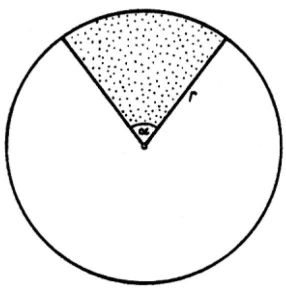
Kreisbogen:

$$b = \frac{r\pi\alpha}{180} \text{ für } \alpha \text{ in Altgrad}$$

$$b = r \cdot \alpha \quad \text{für } \alpha \text{ im Bogenmaß}$$

Kreisfläche: $A = r^2\pi$

Kreisausschnitt (Kreissektor):



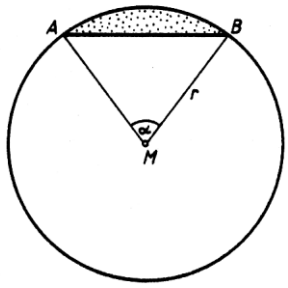
$$A = \frac{r^2\pi\alpha}{360} \quad \text{für } \alpha \text{ in Altgrad}$$

$$A = \frac{r^2\alpha}{2} \quad \text{für } \alpha \text{ im Bogenmaß}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot r$$

Kreisabschnitt (Kreissegment):

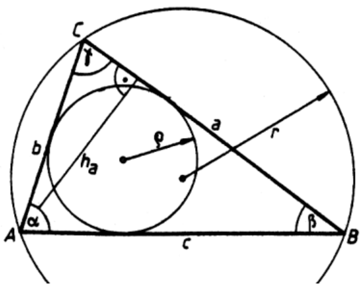
$A = A_{Kreissektor} - A_{\Delta AMB}$



Kreisring:

$A = \pi \cdot \left(R^2 - r^2\right)$

Das Dreieck



Bezeichnungen:

h_a … Höhe zur Seite a (h_b, h_c analog)
r … Umkreisradius
ρ … Inkreisradius

$$s = \frac{u}{2} = \frac{a+b+c}{2}$$

Dreiecksungleichungen:

$a + b > c$
$b + c > a$
$a + c > b$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Formeln für den
Flächeninhalt:

$$A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

$$A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4r}$$

$$A = \sqrt{s \cdot (s-a)(s-b)(s-c)}$$

(Formel von Heron)

$$A = \rho \cdot s$$

$$A = \frac{ab}{2} \cdot \sin\gamma = \frac{bc}{2} \cdot \sin\alpha = \frac{ac}{2} \cdot \sin\beta$$

Sinussatz:

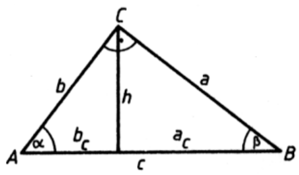
$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$ oder:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

Cosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

Rechtwinkliges Dreieck:



Bezeichnungen:

a, b … Katheten
c … Hypotenuse
h … Höhe
a_c, b_c … Hypotenusenabschnitte

$$A = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$$

Pythagoräischer Lehrsatz[1]

Das Quadrat über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Summe der beiden Quadrate über den Katheten:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Der Kathetensatz (Euklid)

Das Quadrat über der Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist flächengleich dem Rechteck, gebildet aus Hypotenuse und anliegendem Hypotenusenabschnitt:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= c \cdot a_c \\ b^2 &= c \cdot b_c \end{aligned}}$$

Der Höhensatz (Euklid)

Das Quadrat über der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist flächengleich dem Rechteck, gebildet aus den beiden Hypotenusenabschnitten:

$$\boxed{h^2 = a_c \cdot b_c}$$

[1] Auch die Schreibweise „Pythagoreischer Lehrsatz“ ist richtig.

Pythagoräische Zahlentripel:

$$a = 2pq$$
$$b = p^2 - q^2 \quad \text{wobei } p, q \in \angle, p > q$$
$$c = p^2 + q^2$$

p	q	a	b	c
2	1	4	3	5
3	1	6	8	10
4	1	8	15	17
5	1	10	24	26
3	2	12	5	13
4	2	16	12	20
5	2	20	21	29
4	3	24	7	25
5	3	30	16	34
5	4	40	9	41
…	…	…	…	…

Man erhält weitere pythagoräische Zahlentripel, wenn man die in obiger Tabelle zusammengehörenden Werte a, b, c durch λa, λb, λc ersetzt ($\lambda \in \angle$).

Das gleichseitige Dreieck:

$$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$$

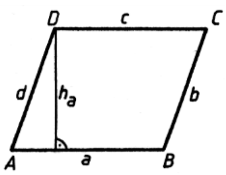
$$A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$$

Das Viereck

Bei jedem Viereck ist die Summe der Innenwinkel gleich 360°.

Das Parallelogramm

$A = g \cdot h$ (Grundlinie mal zugehörige Höhe)
$\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = 180°$
Die Diagonalen halbieren einander.

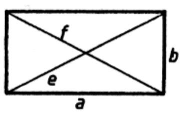


Das Rechteck

$A = a \cdot b$

$e = f = \sqrt{a^2 + b^2}$

Die Diagonalen halbieren einander.



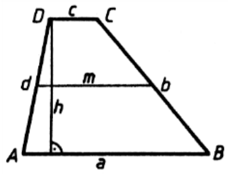
Das Quadrat

$A = a^2$
$e = f = a \cdot \sqrt{2}$

Die Diagonalen halbieren einander und stehen aufeinander normal.

Das Trapez

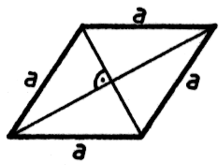
$$A = \frac{a + c}{2} \cdot h = m \cdot h$$



Der Rhombus (= die Raute)

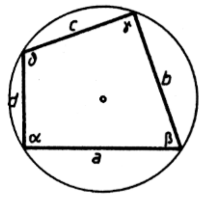
$$A = \frac{e \cdot f}{2}$$

Die Diagonalen stehen aufeinander senkrecht, halbieren einander und halbieren auch die Rhombuswinkel.



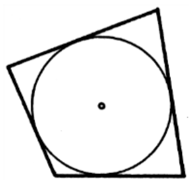
Das Sehnenviereck

$$\alpha + \gamma = 180°$$
$$\beta + \delta = 180°$$
$$A = \sqrt{(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c) \cdot (s-d)}$$
$$\text{wobei } s = \frac{u}{2} = \frac{a+b+c+d}{2}.$$



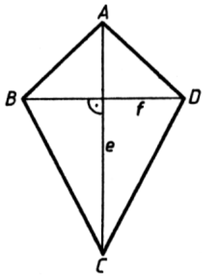
Das Tangentenviereck

$a + c = b + d$
$A = \rho \cdot s$



Das Deltoid (Drachenviereck)

$$A = \frac{e \cdot f}{2}$$



STEREOMETRIE

<u>Hinweis</u>: Die mit einem seitlichen grauen Balken gekennzeichneten Formeln brauchen nicht auswendig gekonnt zu werden!

Bezeichnungen:

V … Volumen
A_O … Oberfläche
h … Höhe
A_G … Grundfläche
A_D … Deckfläche
A_M … Mantel

Das Prinzip von Cavalieri

Körper mit inhaltsgleichen Grundflächen und gleichen Höhen haben gleiches Volumen, wenn sie in gleichen Abständen von der Grundfläche flächengleiche, zur Grundfläche parallele Querschnitte haben.

Das Prisma

Für gerades wie schiefes Prisma gilt:

$$V = A_G \cdot h$$

$$A_O = A_M + 2 \cdot A_G$$

Der Quader

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$A_O = 2 \cdot (ab + ac + bc)$$

Der Würfel

$$V = a^3$$

$$A_O = 6a^2$$

$$d = a \cdot \sqrt{3}$$

(d … Raumdiagonale)

Die Pyramide

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$$

$$A_O = A_G + A_M$$

Hinweis: Die beiden Formeln gelten nicht nur für gerade, sondern auch für schiefe Pyramiden!

Der Pyramidenstumpf

$$V = \frac{h}{3} \cdot \left(A_G + \sqrt{A_G \cdot A_D} + A_D\right)$$

$$A_O = A_G + A_D + A_M$$

Die 5 regelmässigen Polyeder

Bezeichnungen:

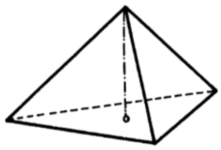
a … Seitenkante
r … Radius der Umkugel
ρ … Radius der Inkugel

Das Tetraeder

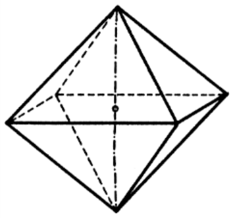
wird von 4 gleichseitigen Dreiecken begrenzt.

$$V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12} \qquad A_O = a^2 \cdot \sqrt{3}$$

$$r = \frac{a}{4} \cdot \sqrt{6} \qquad \rho = \frac{a}{12} \cdot \sqrt{6}$$



Tetraeder



Oktaeder

Das Oktaeder

wird von 8 gleichseitigen Dreiecken begrenzt.

$$V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{3} \qquad A_O = 2a^2 \cdot \sqrt{3}$$

$$r = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2} \qquad \rho = \frac{a}{6} \cdot \sqrt{6}$$

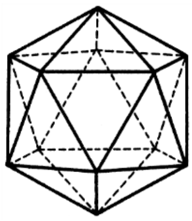
Das Ikosaeder

wird von 20 gleichseitigen Dreiecken begrenzt.

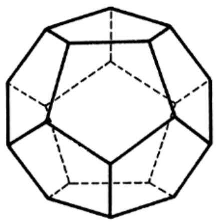
$$V = \frac{5a^3 \cdot \left(3 + \sqrt{5}\right)}{12} \qquad A_O = 5a^2 \cdot \sqrt{3}$$

$$r = \frac{a}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot \left(5 + \sqrt{5}\right)}$$

$$\rho = \frac{a\sqrt{3} \cdot \left(3 + \sqrt{5}\right)}{12}$$



Ikosaeder



Dodekaeder

Das Hexaeder (der Würfel)

wird von 6 Quadraten begrenzt.

$$V = a^3 \qquad A_O = 6a^2$$

$$r = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} \qquad \rho = \frac{a}{2}$$

Das Dodekaeder:

wird von 12 regelmäßigen Fünfecken begrenzt.

$$V = \frac{a^3 \cdot \left(15 + 7\sqrt{5}\right)}{4}$$

$$A_O = 3a^2 \cdot \sqrt{5 \cdot \left(5 + 2\sqrt{5}\right)}$$

$$r = \frac{a\sqrt{3} \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right)}{4}$$

$$\rho = \frac{a\sqrt{10 \cdot \left(25 + 11\sqrt{5}\right)}}{20}$$

Der Drehzylinder
(= der gerade Kreiszylinder)

$$V = r^2\pi h$$

$$A_M = 2r\pi h \qquad A_O = 2r^2\pi + A_M$$

Der schiefe Zylinder

$V = A_G \cdot h$, $A_M = u \cdot s$, wobei s die Mantellinie und u den Umfang des Querschnittes normal zur Mittengeraden bedeutet.

Der Kegel

Für den geraden wie den schiefen Kegel gilt:

$$V = \frac{A_G \cdot h}{3}$$

Der Drehkegel
(= der gerade Kreiskegel)

$$V = \frac{r^2\pi h}{3} \qquad A_M = r\pi s$$

$$A_O = r^2\pi + A_M$$

Der Drehkegelstumpf

$$V = \frac{\pi h}{3} \cdot \left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

$$A_M = \pi s \cdot \left(R + r\right)$$

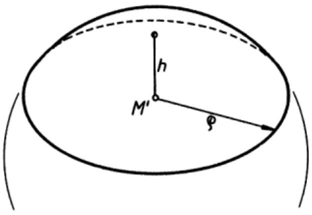
$$A_O = R^2\pi + r^2\pi + A_M$$

(Mit s ist die Mantellinie gemeint.)

Die Kugel

$$V = \frac{4r^3\pi}{3} \qquad A_O = 4r^2\pi$$

Der Kugelabschnitt (Das Kugelsegment)



$$V = \frac{\pi h^2}{3} \cdot (3r - h)$$

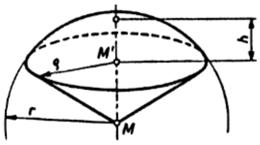
$$A_M = 2r\pi h$$

$$= \pi \cdot (\rho^2 + h^2)$$

$$A_O = 2r\pi h + \rho^2 \pi$$

$$\rho = \sqrt{h \cdot (2r - h)}$$

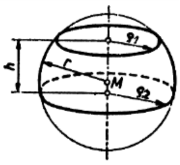
Der Kugelausschnitt (Der Kugelsektor)



$$V = \frac{2r^2 \pi h}{3}$$

$$A_O = 2r\pi h + \rho\pi r$$

Die Kugelschicht



$$V = \frac{\pi h}{6} \cdot (3\rho_1{}^2 + 3\rho_2{}^2 + h^2)$$

$$A_M = 2r\pi h \quad (\text{„Kugelzone“})$$

Das Rotationsellipsoid

$$V = \frac{4\pi}{3} \cdot a \cdot b^2$$

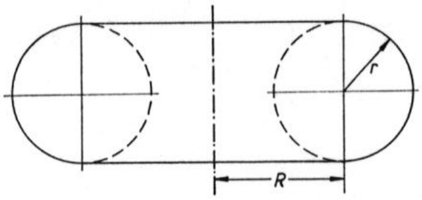
(bei Rotation um die Hauptachse)

Der Torus

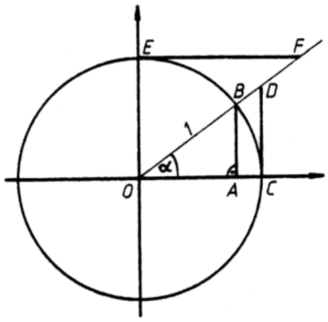
$$V = 2\pi^2 \cdot r^2 \cdot R$$

$$A_O = 4\pi^2 \cdot r \cdot R$$

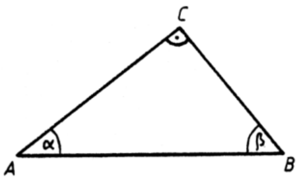
r … Meridiankreisradius
R … Mittenkreisradius



Trigonometrische Funktionen



$$\cos\alpha = \overline{OA}$$
$$\sin\alpha = \overline{AB}$$
$$\tan\alpha = \overline{CD}$$
$$\cot\alpha = \overline{EF}$$



AB Hypotenuse

CD Gegenkathete zu α

AC Ankathete zu α

$\beta = 90° - \alpha$

$$e^{i\cdot\alpha} = \cos\alpha + i\cdot\sin\alpha$$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Im rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$

Daraus ergibt sich:

$$\tan\alpha\cdot\cot\alpha = 1$$

$$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1+\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Periodizität der Kreisfunktionen:

sin und cos haben die primitive Periode 2π,

tan und cot haben die primitive Periode π.

Besondere Funktionswerte:

$\alpha \rightarrow$	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

$$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)$$

$$\sin\alpha = \mp\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)$$

Vorzeichen der Kreisfunktionswerte in den vier Quadranten (siehe Einheitskreis!):

Quadrant	sin	cos	tan	cot
I	+	+	+	+
II	+	–	–	–
III	–	–	+	+
IV	–	+	–	–